

© Д.Е. ИГОШИН¹, О.А. НИКОНОВА², П.Я. МОСТОВОЙ³

¹Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал)

^{2,3}Тюменский государственный университет
igoshinde@gmail.com

УДК 531/534

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ РЕГУЛЯРНЫМИ УПАКОВКАМИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ СФЕР

SIMULATION OF POROUS MEDIUM IN THE FORM OF SYSTEMATICALLY PACKED INTERSECTING SPHERES

АННОТАЦИЯ. Предложена модель пористой среды в виде регулярных упаковок пересекающихся сфер. Рассмотрены упаковки двух типов — кубическая примитивная и гексагональная примитивная. Степень пересечения сфер является модельным параметром, характеризующим микро неоднородности пористой среды, позволяющим легко воспроизводить геометрию порового пространства при численном решении уравнений Навье-Стокса в прямом гидродинамическом моделировании. Получены аналитические зависимости пористости и просветности от степени пересечения сфер в каждой упаковке. Проведен параметрический анализ математической модели. Показано, что с помощью данных упаковок можно моделировать пористые среды в широком диапазоне пористости: (3,5÷47,6)% — для кубической упаковки и (16,5÷39)% — для гексагональной. Минимальное значение пористости соответствует замкнутым порам. Установлено, что существуют два типа сечений пор, определяющих фильтрационно-емкостные свойства пористой среды. Предложена аналитическая оценка снизу для проницаемости пористой среды методом эквивалентного капилляра, что позволяет найти соответствие между моделями идеального и фиктивного грунта.

SUMMARY. A model of a porous medium in the form of systematic packing of intersecting spheres is introduced. Two types of packaging — a primitive cubic and hexagonal primitive one — are considered. The intersection degree of the spheres is a model parametric variable characterizing microinhomogeneity of porous medium. The parameter makes it easy to construct geometry of the pore space in the numerical solution of the Navier-Stokes equations in the direct hydrodynamic simulation. The analytical dependences of porosity and luminal on the degree of intersecting spheres in each package were obtained. Parametric analysis of the mathematical model is done. It has been shown that the packing makes it possible to simulate porous medium in a wide range of porosities: (3,5÷47,6)%, for cubic packing and (16,5÷39)%, for hexagonal one. The minimum value of porosity conforms to the closed pores. There are two types of sections determining permeability and porosity of the porous medium. An analytical lower bound for the permeability of the porous medium is done with the method of equivalent capillary; it allows to find the match between the perfect soil and fictitious soil.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Пористая среда, скелет, зерно, регулярная упаковка, пористость, просветность, проницаемость.

KEY WORDS. Porous medium, solid matrix, grain, systematic packing, porosity, luminal, permeability.

Горные породы являются ярким примером пористых сред, встречающихся в природе. Изучение структуры порового пространства горных пород находит свое приложение в нефтегазовой промышленности, где для получения основных фильтрационно-емкостных характеристик — пористости, просветности и проницаемости — необходим анализ геометрии пор и получение решений уравнений движения жидкости в породе. Пористая среда представляет собой твердое тело («скелет»), пронизанное системой сообщающихся пустот (пор) [1]. Понятия пористости и просветности совпадают только для изотропной среды [2]. Поскольку частицы горной породы имеют неправильную форму и самые разнообразные размеры, невозможно искать решение уравнений движения жидкости в такой среде. Поэтому создаются упрощенные математические модели порового пространства, воспроизводящие различные варианты геометрии пор. Такими моделями являются идеальный и фиктивный грунт [3]. Для идеального грунта структура порового пространства допускает аналитическое определение основных фильтрационно-емкостных характеристик [4]. Фиктивный грунт — пористая среда, построенная из одинаковых шарообразных частиц, является более сложной моделью. Моделирование фиктивного грунта можно реализовать регулярными упаковками сфер [5] или случайными полями [6; 7]. Впервые моделирование регулярных упаковок было предложено Ч. Сликтером [8]. В других работах, если рассматриваются регулярные упаковки, то сферы полагают непересекающимися [9]; [10], что облегчает определение характеристик пористой среды, но не соответствует реальному расположению зерен пористой среды. В статистической гидродинамике сцементированность частиц описывается хаотически расположенными пересекающимися сферами, что позволяет трактовать пористую среду и фильтрационные процессы как случайные поля [6]; [7]. Ввиду сложности геометрии порового пространства фиктивного грунта аналитическое решение уравнения движения жидкости в такой среде не представляется возможным.

В настоящей работе предложена модель фиктивного грунта с различной степенью перекрытия сфер, что можно интерпретировать как сцементированность частиц горной породы между собой. Предлагаемый подход закладывает теоретические основы для определения характеристик пористой среды путем прямого гидродинамического моделирования. При этом уравнения Навье-Стокса для течения в пористой среде достаточно решать в объеме одной поры.

Используя данный подход, было определено влияние микронеоднородностей (переменная просветность) на макроскопические параметры пористой среды: пористость и проницаемость (приведена оценка снизу).

Геометрия задачи. Рассмотрим зерна скелета пористой среды в виде перекрывающихся сфер (рис. 1). Степень перекрытия сфер зададим безразмерным параметром

$$\alpha = \delta / r, \quad (1)$$

где δ — высота шарового сегмента, отсекаемого плоскостью симметрии, r — радиус сферы. Расстояние между центрами ближайших сфер, расположен-

ных в узлах элементарной ячейки, примем постоянным и равным $2r_0$, где r_0 — радиус, соответствующий случаю касания сфер ($\alpha = 0$). Рассмотрим следующие типы ячеек: кубическую примитивную, гексагональную примитивную. Из рис. 2 видно, что сторона элементарной ячейки

$$L = 2r_0 \tag{2}$$

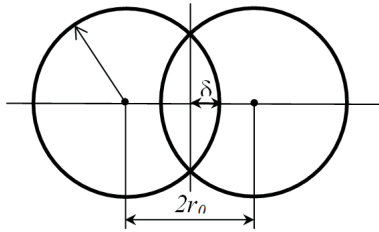


Рис. 1. Перекрывтие сфер

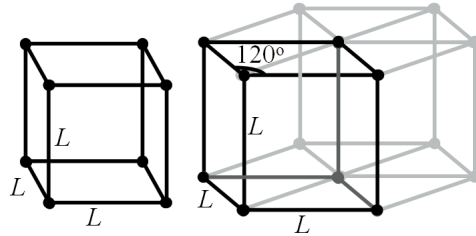


Рис. 2. Типы ячеек

Радиус сфер связан со степенью их перекрывтия соотношением

$$r = \frac{r_0}{1-\alpha}, \quad \alpha \in [0; 1]. \tag{3}$$

Пористость. По определению пористость

$$m = \frac{V_{\text{п}}}{V} = \frac{V - V_{\text{с}}}{V} = 1 \tag{4}$$

где V , $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{с}}$ — объемы пористой среды, пор и скелета соответственно. Объем скелета в ячейке составляют сферы за вычетом объема их пересечений в виде шаровых сегментов

$$V_{\text{с}} = n_{\text{сф}}V_{\text{сф}} - n_{\text{сг}}V_{\text{сг}}, \quad V_{\text{сф}} = 4\pi r^3/3, \quad V_{\text{сг}} = \pi\delta^2(r - \delta/3) \tag{5}$$

где $n_{\text{сф}}$, $n_{\text{сг}}$ — количество сфер и сегментов в ячейке, $V_{\text{сф}}$, $V_{\text{сг}}$ — объемы сферы и шарового сегмента соответственно.

Перейдем к определению пористости сред, образованных различными регулярными упаковками сфер. Объем ячейки пористой среды, количество сфер и сегментов зависят от типа упаковки и приведены в табл. 1. Подставляя эти значения в (4) и (5) с учетом (1)-(3), получим выражения для пористости, приведенные в табл. 1. Также приведены значения пористости для $\alpha = 0$.

С увеличением степени перекрывтия сфер α объем пор уменьшается, вместе с этим уменьшается площадь поперечного сечения перемычек между порами. Рассмотрим предельный случай, когда поры становятся замкнутыми. Из рис. 3 по теореме косинусов, с учетом (2) и (3), найдем предельные значения $\alpha = \alpha_*$ для рассматриваемых упаковок: кубической и гексагональной соответственно

$$L^2 + L^2 = (2r)^2, \quad L^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cdot 0,5.$$

Полученные значения α_* приведены в табл. 1. Приведем минимальные значения пористости (при $\alpha = \alpha_*$) для кубической упаковки

$$m(\alpha_*) = 1 - \frac{\pi}{12}(15 - 8\sqrt{2}) \approx 0,0349,$$

гексагональной упаковки

$$m(\alpha_*) = 1 - 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9} \right) \approx 0,1649.$$

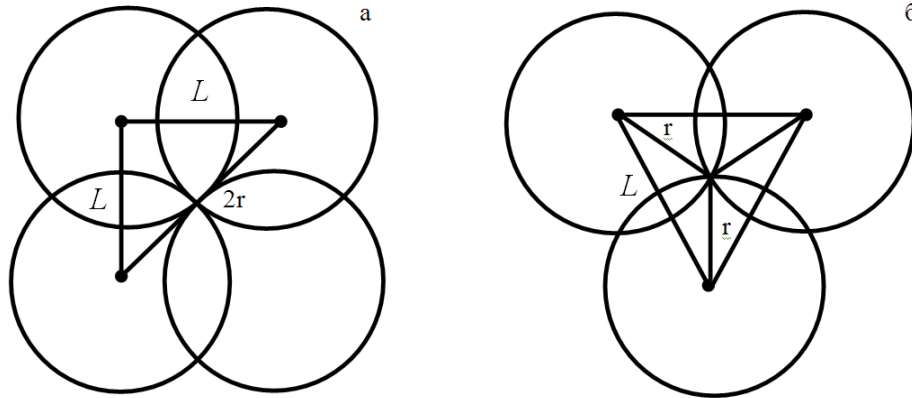


Рис. 3. К определению условия замкнутости пор для кубической (а) и гексагональной (б) упаковок

Таблица 1

Пористость

Упаковка	Параметры				Пористость		
	V	$n_{сф}$	$n_{сг}$	α_*	Аналитическое выражение	$m(0)$	$m(\alpha_*)$
Кубическая простая	L^3	1	6	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,2929$	$1 - \frac{\pi[2 - 3\alpha^2(3 - \alpha)]}{12(1 - \alpha)^3}$	$1 - \frac{\pi}{6} \approx 0,4764$	0,0349
Гексагональная простая	$\frac{\sqrt{3}}{4} L^3$	$\frac{1}{2}$	4	$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,134$	$1 - \frac{\pi[1 - 2\alpha^2(3 - \alpha)]}{3\sqrt{3}(1 - \alpha)^3}$	$1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0,3954$	0,1649

На рис. 4 приведены формы пор и положения характерных сечений. Сечения отдельно показаны на рис.5. Из рисунков видно, что каждая упаковка характеризуется двумя типами сечений (1 и 2) — соответственно с пересечением зерен и без. Сечение 0 приведено для того, чтобы найти безразмерную координату z_A точки А, разделяющей области с разными типами сечений. Обезразмеривание проведено на $L/2$, что соответствует радиусу сферы в случае касания (2). Рассмотрим $\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$. По теореме Пифагора

$$z_A^2 = \left(\frac{2r}{L}\right)^2 - 1^2 \tag{6}$$

Безразмерный радиус окружностей в сечениях на рис. 5 зависит от α и z — вертикальной координаты сечения. Из $\triangle BDE$, $\angle E=90^\circ$ по теореме Пифагора

$$\rho^2 = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} - z^2 \tag{7}$$

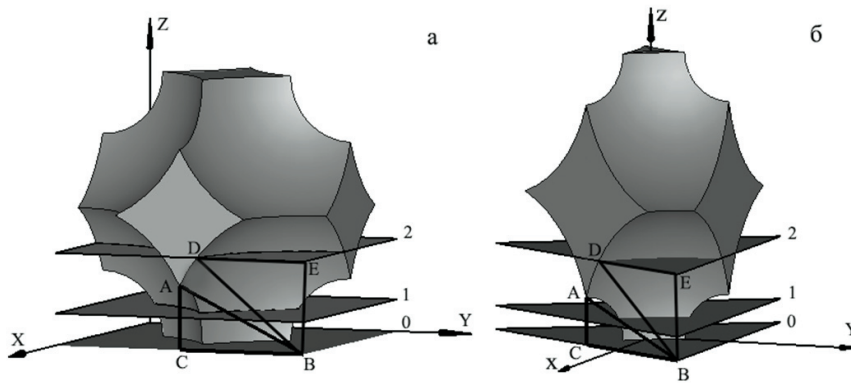


Рис. 4. Форма пор и их характерные сечения для кубической при $\alpha=0,1$ (а) и гексагональной при $\alpha=0,05$ (б) упаковок

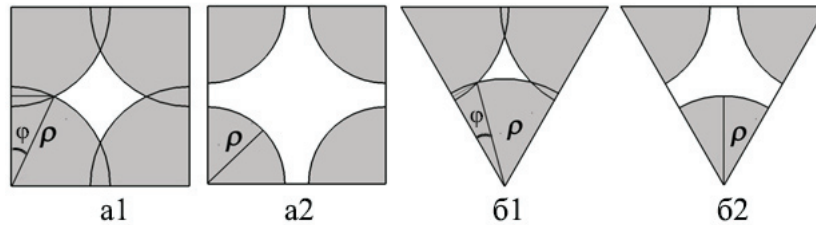


Рис. 5. Сечения для определения просветности в кубической (а1, а2) и гексагональной (б1, б2) упаковках. Серый цвет соответствует скелету

Просветность. Отношение площади пор к общей площади сечения называется просветностью (поверхностной пористостью)

$$n = \frac{S_{\Pi}}{S} = \frac{S - S_c}{S} = 1 - \frac{S_c}{S}, \quad (8)$$

где S, S_c, S_{Π} — площади ячейки, скелета и пор соответственно. Площадь скелета в ячейке составляют окружности за вычетом площади их пересечений в виде круговых сегментов

$$S_c = n_{ок} S_{ок} - n'_{ст} S'_{ст}, \quad S_{ок} = \pi r^2, \quad S_{ст} = (\rho L/2)^2 f(\varphi) \quad (9)$$

$$f(\varphi) = \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2}, \quad \cos \varphi = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & z \leq z_A; \\ 1, & z_A < z \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

где $n_{ок}, n'_{ст}$ — количество окружностей и сегментов в сечении, $S_{ок}, S'_{ст}$ — площадь окружности и кругового сегмента соответственно. Подставляя (9) и (10) в (8), получим аналитические выражения для просветности, приведенные в табл. 2. Также приведены минимальные значения просветности n_{\min} ($z=0$) для случая касания сфер ($\alpha=0$). Отметим, что минимальная просветность существенно меньше пористости.

На рис. 6 в виде изолиний приведена зависимость просветности от двух параметров: α и z . Видно, что с ростом α просветность уменьшается, так как

зерна скелета увеличиваются и занимают больший объем пространства. С ростом z (центр поры соответствует $z=1$) просветность увеличивается.

Таблица 2

Просветность

Упаковка	Параметры			Просветность	
	S	$n_{ок}$	$n'_{сг}$	Аналитическое выражение	$n_{min}(0)$
Кубическая простая	L^2	1	4	$1 - \left(\frac{\pi}{4} - f(\varphi)\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - z^2\right)$	$1 - \frac{\pi}{4} \approx \approx 0.2146$
Гексагональная простая	$\frac{\sqrt{3}}{4} L^2$	$\frac{1}{2}$	3	$1 - \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - f(\varphi)\right) \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} - z^2\right)$	$1 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx \approx 0,0931$

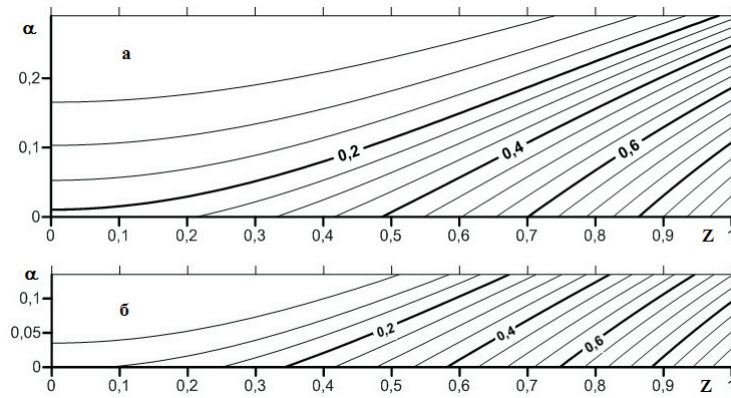


Рис. 6. Зависимость просветности от α и z в виде изолиний для кубической (а) и гексагональной (б) упаковок

Проницаемость — способность горных пород фильтровать сквозь себя флюиды при наличии перепада давления. Запишем закон Дарси

$$\bar{u} = \bar{v}n = \frac{k \Delta P}{\mu L}, \tag{13}$$

где \bar{u} — средняя скорость фильтрации, \bar{v} — средняя физическая скорость, k — проницаемость, μ — динамическая вязкость, ΔP — перепад давления, L — длина проницаемого участка.

Ламинарное течение в цилиндрическом капилляре (течение Пуазейля) характеризуется средней физической скоростью по сечению

$$\bar{v} = \frac{\Delta P}{8\mu L} R^2 \tag{14}$$

Рассмотрим цилиндрический капилляр, площадь сечения которого равна минимальной площади сечения поры (при $z=0$) в рассматриваемых упаковках (рис. 7). Запишем условие эквивалентности

$$n_{min}S = \pi R_{эКВ}^2, \tag{15}$$

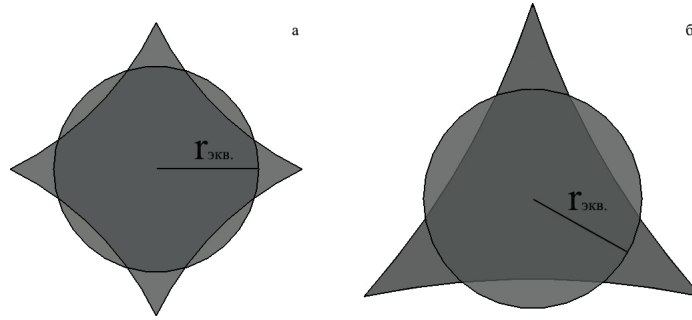


Рис. 7. Сечения эквивалентных капилляров для кубической (а) и гексагональной (б) упаковок

Из системы уравнений (13) — (15) найдем проницаемость среды

$$k = \frac{S}{8\pi} n_{min}^2, \tag{16}$$

из таблицы 2 для кубической упаковки

$$n_{min} = 1 - \left(\frac{\pi}{4} - f(\varphi)\right) \frac{1}{(1-\alpha)^2}, \tag{17}$$

для гексагональной упаковки

$$n_{min} = 1 - \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6} - f(\varphi)\right) \frac{1}{(1-\alpha)^2}. \tag{18}$$

На рис. 8 представлены зависимости основных параметров пористой среды, характеризующие ее микронеоднородность, при $L=10^{-5}$ м. Видно, что с увеличением степени пересечения сфер α пористость, минимальная просветность и проницаемость уменьшаются, причем для проницаемости зависимость очень сильная (показана в полулогарифмическом масштабе).

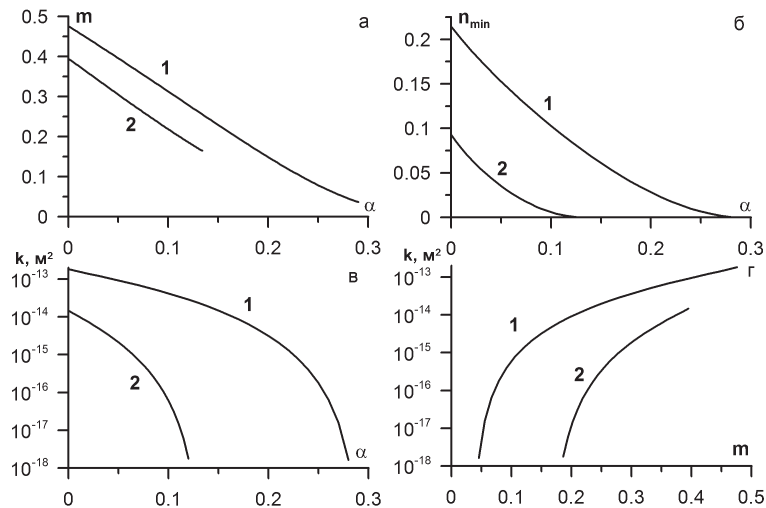


Рис. 8. Пористость, минимальная просветность и оценка проницаемости для кубической (1) и гексагональной (2) упаковок

Заклучение. Предложена модель пористой среды в виде регулярных упаковок пересекающихся сфер. Получены аналитические зависимости пористости и просветности от степени пересечения сфер в каждой упаковке. Показано, что с помощью данных упаковок можно моделировать пористые среды в широком диапазоне пористости: (3,5÷47,6)% — для кубической упаковки и (16,5÷39)% — для гексагональной. Установлено, что существуют два типа сечений пор, определяющих фильтрационно-емкостные свойства пористой среды. Предложена аналитическая оценка снизу для проницаемости пористой среды методом эквивалентного капилляра, что позволяет найти соответствие между моделями идеального и фиктивного грунта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ентов В.М. Теория фильтрации. Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. С. 121-128.
2. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: Учебное пособие. М.: МГУ, 2009. 88 с.
3. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., 1947. С. 11-24.
4. Басниев К.С. Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика. М., 2005. С. 376-380.
5. Хейфец Л.И., Неймарк А.В. Многофазные процессы в пористых средах. М.: Химия, 1982. С. 29-33.
6. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
7. Швидлер М.И. Фильтрационные течения в неоднородных средах. М.: Гостоптехиздат, 1963. 136 с.
8. Slichter, C.S. Part II of the 19th Annual Report of the United States Geological Survey, 1898. 295 p.
9. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. Л.: Недра, 1985. 240 с.
10. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Пер. с англ. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 640 с.

REFERENCES

1. Entov, V.M. Filtration theory. *Sorosovskii obrazovatel'nyi zhurnal — Soros Education Journal*. 1998. № 2. Pp. 121-128. (in Russian).
2. Leont'ev, N.E. *Osnovy teorii fil'tratsii: Uchebnoe posobie* [Filtration fundamentals]. Moscow, 2009. 88 p. (in Russian).
3. Leibenzon, L.S. *Dvizhenie prirodnykh zhidkosti i gazov v poristoi srede* [Nature liquids and gases flow through porous medium]. Moscow, 1947. Pp. 11-24. (in Russian).
4. Basniev, K.S. Dmitriev, N.M., Rozenberg, G.D. *Neftegazovaia gidromekhanika* [Oil and gas hydromechanics]. Moscow, 2005. Pp. 376-380. (in Russian).
5. Kheifets, L.I., Neimark, A.V. *Mnogofaznye protsessy v poristykh sredakh* [Multiphase processes in porous medium]. Moscow, 1982. Pp. 29-33. (in Russian).
6. Shvidler, M.I. *Statisticheskaiia gidrodinamika poristykh sred* [Statistical hydromechanics of porous medium]. Moscow: Nedra, 1985. 288 p. (in Russian).
7. Shvidler, M.I. *Fil'tratsionnye techeniia v neodnorodnykh sredakh* [Filtration flows in heterogeneous medium]. Moscow, 1963. 136 p. (in Russian).
8. Slichter, C.S. Part II of the 19th Annual Report of the United States Geological Survey, 1898. 295 p.

9. Romm, E.S. *Strukturnye modeli porovogo prostranstva gornykh porod* [Structural models of porous medium of rock formations]. Leningrad, 1985. 240 p. (in Russian).

10. Masket, M. *Techenie odnorodnykh zhidkостей v poristoi srede* [The flow of homogeneous fluids through porous medium] / Transl. fr. Eng. Moscow — Izhevsk, 2006. 640 p. (in Russian).

Авторы публикации

Игошин Дмитрий Евгеньевич — научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (Тюменский филиал), кандидат физико-математических наук

Никонова Ольга Александровна — студент Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета

Мостовой Павел Ярославович — студент Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета

Authors of the publication

Dmitry E. Igoshin — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics (Tyumen Branch), Siberian Branch of Russian Academy of Sciences

Olga A. Nikonova — Student, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University

Pavel Ya. Mostovoy — Student, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University